

1 Mathematica を使ってみる

1. はじめに

まず, Mathematica を起動させて, 上にあるメニューバーのファイルから新規作成を選び, ノートブック (.nb) と呼ばれるファイル (タイトルは名称未定義-1) を開く.

画面の左端上にプラスキーが示され, カーソルをそのプラスキーに移動させると【どのように入力するか選択してください】との表示が示され, クリックによって入力する方法が, 以下のどれかから選択できるようになっている. ただし, 無視して入力すると計算ができるセルが現れる.

(1) Mathematica 入力, (2) 自由形式の言語入力, (3) Wolframalpha クエリ, (4) テキスト, (5) その他のテキスト書式
以下の 2 つの新しい機能が備わったことによる.

1. = Free-Form Linguistic Input (自由形式の言語入力)

= (タイプの =) を入力することで可能で, このときオレンジ色の正方形の中に等号がある表示に変わる.

例えば,

```
plot sinx from -pi to pi
```

を実行すると

```
Plot[Sin[x],{x,-Pi,Pi}]
```

と変換されて, グラフを出力する式に変換される.

2. == Wolframalpha クエリ (Wolframalpha との結合型)

== (タイプで = を続ける) を入力することで可能. このとき WolframAlpha と結合し, オレンジ色のイガグリののような図形の中に等号がある表示に変わる. 例えば

```
== Sin[x]
```

のようにタイプして実行すると

```
WolframAlpha["Sin[x]"]
```

と変換されて $\sin x$ に関数する情報が展開される.

WolframAlpha 関数は, ["A"] を後につけることで, A (Mathematica の規則で帰されるオブジェクト) に関する情報を WolframAlpha A P L (アプリ) から集め, Mathematica で計算可能な結果等を提供する.

これらの入力, 英語で query[クワイエリ] (質問) をするのと同じことで, 簡単にできるようになっている.

参考: もし, パソコンでインターネットが使える環境であれば, 以下のページで Mathematica の使い方を見ることができる. ここでは, Mathematica の基本的規則等, 使い方が日本語で説明されている.

http://www.wolfram.com/broadcast/screencasts/handsonstart_ja/

また, Mathematica 9 からは「入力アシスタント」(自動補完機能) が追加され, Mathematica で多用する組み込み関数 (コマンド) の入力がより簡単になった. 例えば, Clear をタイプしたいときは, 最初の文字 2 個 C1 をタイプすると, C1 から始まる組み込み関数が下に表示される. カーソルを Clear にあてるとその右に 田 (document) が表示されてこれをクリックすると使い方等の説明画面に移動する.

Clear をクリックすると入力が完了する. そのとき, 同時に表示される右下にある ▼ をクリックすると簡単な使い方の形式と 田 (document) も表示されるようになり, 必要な式を代入すれば評価式が完成するので, タイピングに関してより便利になった.

2. 簡単な数の計算

基本的な数の四則演算については、メニューバのヘルプをクリックし、ドキュメントセンターを選択。画面でカーソルを数学とアルゴリズムへ移動させてクリックする。そのとき、下に表示される『数学関数』から『算術関数』へと進むと算術関数の画面が表示される。ここに基本的な演算に関する説明がある。下の『チュートリアル』の“数の四則演算”をクリックして表示すると具体的例がある。数の四則計算については、キー操作は、ほぼ電卓と同じようにできる。

Mathematica では、式として入力し、その計算結果を得るには次のことを実行する。

Shift (Sキー) を押しながら Enter (Eキー) を押す

以下、この操作の実行を S+E で表すことにする。

(1) 四則演算

加減は + , - で表されるキーをそれぞれ押す。乗法 \times は * またはスペースキーを押す。除法 \div は / を押す。分数 $1/3$ や π のような実数は、N[1/3] (N は n の大文字) のように N[] の中に数をいれると、小数 (6 桁の近似値) として出力されます。

- $2-6=$ は 2 - 6 とタイプして S+E
- $5 \times 7=$ は 5 * 7 または 5 7 (5 と 7 の間にスペースを入れる) とタイプして S+E
- $8 \div 2=$ は 8/2 とタイプして S+E
- 2^3 は 2^3 とタイプして S+E, また $\sqrt{2}$ は Sqrt[2] とタイプして S+E

(2) 円周率 π と ネーピアーの数 e の表記の仕方

- π は Pi (P は大文字)
- e は E (E は大文字)

(3) 指数 (べき乗) と根号 (ルート) の表記の仕方

- $2^3(2^{3+1})$ は 2^3(2^(3+1))
- $\sqrt{2}$ は Sqrt[2] (S は大文字) または 2^(1/2)

パレット画面の活用

例えば、 π を入力するとき、Pi (P は大文字) とタイプすればよいが、メニューバからパレットを選び、基本数学アシスタント画面を開き、そこにある電卓機能 (表示されていなければ、前にある三角記号をクリックして開く) の基本に表示される、 π をクリックしてもよい。また、 $\frac{100}{3}$ を入力するとき、100/3 とタイプする代わりに、基本数学アシスタント画面のタイプセット  をクリックする。このとき、 が入力される。キーボードで 100 をタイプすると、分子が 100 と定まる。次に Tab キーをクリックすると分母に  が移り、3 を入力すると $\frac{100}{3}$ が入力される。

このような入力は電卓機能の基本画面を用いれば、先に 100 をタイプして  /  をクリックすれば続けて 3 を入力するだけでできる。他の入力も同様にできる。

注意 $2^{(300)}$ と $2.0^{(300)}$ を比較して見よ。2.0 は 整数 2 ではなく、2 に近い 19 桁の小数で、近似すると 2 になるという小数を表す。但しこのような数の計算は 19 桁精度で行なわれて、画面上は小数点を移動させて 6 桁精度で表示される。Pi と N[Pi] も同様である。Sin[Pi] と Sin[N[Pi]] を比較せよ。

3. もう少し複雑な計算

電卓よりも、便利な計算ができることを見ていく。特に *Mathematica* では関数 $a[n]$ (n は変数) を定義することが可能であり、さらにそれらの無数に近いデータを瞬時に扱うことができる。

関数 N の使い方

詳しくは、`?N` とタイプして `S+E` を実行すると関数 N の使い方の説明が表示される。数 a の近似は

`N[a]` または `N[a,n]`

とする。前者は 6 桁で近似される。後者のようにすると可能であれば、 n 桁で近似される。例えば、 π の近似は `N[Pi]`。 π を 30 桁で近似したいときは `N[Pi,30]` とタイプして実行する。

実際例

```
In[1]:= N[Pi]
Out[1]= 3.14159          ( $\pi \approx 3.14159$ )
```

```
In[2]:= N[100/3,20]
Out[2]= 33.333333333333333333 ( $\frac{100}{3} \approx 33.333333333333333333$ )
```

例題 1

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

定義し、近似関数 N を用いて a_1, a_2, \dots, a_{20} まで計算せよ。さらに a_{100}, a_{200} を計算せよ。

答 まず

```
Clear[a];a[n_] := (1+1/n)^n
```

と定義する。この後、`a[20]` のようにすれば a_{20} が計算される。

Mathematica における定義の仕方

上の答にあるように、最初に関数 `Clear` で、記号 a の (今まで使用された) 式の内容を取り消すようにすることを薦める。その理由は、`;` (この記号 `;` は、続けて次の操作を実行せよとの指令になる) に続いて式を定義するのであるが、式の内容をタイプミスした場合や、`a[n]` を別の式に置き換えたもので評価したい場合便利で、`a[n_]` の右辺の式だけを変更し、実行すれば同様の結果を得ることができるためである。

このように、式を定義するときは、採用する文字 (上の場合は、 a になる) に対して、関数 `Clear` (使い方は `Clear[a]`) をつける。

また、変数 n の関数 `a[n]` を定義したいときは、`a[]` の `[]` の中に、変数 n のあと下線 `_` (ブランクという) を引いた `n_` を入れる。このとき文字の後にブランクを入れる指定によってその文字が変数として定義される。このとき、変数 n は緑色に表示されて、それが変数であることがよくわかり、入力ミスの発見に役立つ。

定義後 `a[100]` のようにタイプすると変数 n に、 $n = 100$ を代入した値が計算される。以下を実行せよ。

```
{a[100],a[200]}
```

このようにいくつかのものを同時に計算するときは、{ } (List と呼ばれる) を用いて、で区切って入れる。答が分数で表示されるので、少数表示にするときは、近似関数 N を用いて以下のようにする。

$$\{N[a[100]],N[a[200]]\}$$

または、

$$\{a[100],a[200]\}/N$$

とすればよい。 $/N$ を後に置くことで、前にあるリストの成分を少数で近似できる。ただし、6桁で表現するだけである。

例題 2

ネイピアの数 e (E 、またはメニューバからパレットを選び、基本数学アシスタント画面を開き、基本にある e を選択する) に $N[E,10]$ のように 10 表示で近似値を求めて、例題 1 で求めた値 a_{100}, a_{200} と比較せよ。

答

$$\{N[E,10],N[a[100],10],N[a[200],10]\}$$

次に、組込み関数 $Limit$ を用いて $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を計算する。

$Limit$ は $a[n]$ が式として具体的に式として定義されているとき

$$Limit[a[n],n \rightarrow Infinity]$$

のように使う。ここで、 $Infinity$ の代わりに基本数学アシスタント画面より ∞ をクリックしてペーストしてもよい。

Mathematica におけるデータの扱い方

Mathematica ではデータの集合 (集まり) は $List$ と呼ばれ、

$$\{a[1], a[2], \dots, a[n]\}$$

のように表される。ここで { } と囲まれるのが特徴である。その中にあるものを要素という。詳しくは、

?List

を実行し、表示される画面を参照する。そこには、リストの構築など、リストについて説明されている。リストは Mathematica では非常に重要になる。

(1) リストの作成。

リストの作成に便利な組込み関数 $Table$ がある。 $Table$ の詳細は ?Table で表示される画面を参照せよ。基本的には

$$Table[a[n],\{n,1,10\}]$$

のように用いる。これは $\{a[1], \dots, a[10]\}$ と同じ意味になる。また、

$$T[m_]:=Table[a[n],\{n,1,m\}]$$

のように定義して、T[100] を実行すると a[1], ..., a[100] までを集合として一度に出力できる。このように帰納的な集合の定義に用いることができる。m の値を大きくすることで無限に近い値のデータを扱うことができる。

(2) 要素の抽出。

リスト (例えば T[100]) が定義されていて、リストの最初から k 番目の要素を抽出したいときは

```
T[100][[k]]
```

のようにすると要素 a[k] が出力される。(詳しい説明はリストの説明画面にある)。

例題 3

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

定義し、 a_1, a_2, \dots, a_{200} を近似コマンド N を用いて 小数として一度に表せ。

答 例題 1 のように、

```
Clear[a];a[n_] := (1+1/n)^n
```

を定義し、例えば、文字 T を用いて

```
Clear[T];T[n_] :=Table[N[a[k]],{k,1,n}]
```

とさらに定義する。このとき

```
T[200]
```

とすればよい。

問題

- (1) e^{10} を 20 桁で近似せよ。
- (2) 度の単位をラジアンに直して $\sin 31^\circ$ を計算せよ。

三角関数 sin は Sin[] (S は大文字) で表記する。このとき、[] 中の数字はラジアンとして計算される。31 度という形で入力する場合は、基本数学アシスタント画面の ° を用いて 31° (この場合、31 に続いて ° をクリックする) とするか、31 Degree とする必要がある。

近似計算する場合は組込み関数 N を利用する。

- (3) e^π と π^e はどちらが大きいですか。

- (4)

$$b_n = \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

を定義し、組込み関数 N を用いて、例題 1, 2 で扱ったように b_1, b_2, \dots, b_{20} や b_{100}, b_{200} を評価せよ。次に $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めて見よ。さらに、近似値が 0.9999 になるような最小の自然数 n を見つけよ。