3 Mathematica で方程式を解く

１．関数 `Solve`

メニューバの ヘルプをクリックし，ドキュメントセンターを選択．次に表示画面の最上の空白の中に，`Solve` を挿入し，ボタン >> をクリックする（または `?Solve` とタイプして実行する）と，関数 `Solve` の使い方が説明される画面にいくことができる．

（１）x を未知数とする方程式 $f(x) = 0$ を解法.

```
Solve[f[x]==0,x]
```

ここで，数式の等号 = は Mathematica では == とすること．
このとき，解は

```
{{x->sol}}
```

の形式の規則のリストとして与えられることに注意する．解が複数のときは

```
{{x->sol1},{x->sol2}, ...}
```

のようなリストになる．この意味は以下の理由による．

```
F[x] /.{x->a}  (F[x]/.x->a でもよい)
```

または

```
F[x]/.{{x->a},{x->b},...}
```

とすると，式 `F[x]` において，規則 `{x->a}` を（または 複数の規則 `{x->a}`, `{x->b}`, ...) を適用し，x の部分をすべて a で変換し，その結果 `F[a]` を（または `{F[a],F[b],..  }` を）計算して返すことになる．

ここで記号　`/.`（`ReplaceAll` ）は，後にある　`->`　で指示される変換規則を適用し，すべて変換または代入せよという指令を表す．詳しくはメニューバの ヘルプをクリックし，ドキュメントセンターを選択．次に表示画面の最上の空白の中に，`ReplaceAll` を挿入し，ボタン >> をクリックするとコマンド `ReplaceAll` の説明がある．

例題 1

Mathematica による方程式 $x^2 - 3x - 4 = 0$ の解法を例で確認せよ．

1）`Solve[x^2-3*x-4==0,x]`

2）`x/.Solve[x^2-3*x-4==0,x]`

3）`sol:=Solve[x^2-3*x-4==0,x];x/.sol`

4）`x^2-3*x-4/.sol`

答　さて，1) では, 解は　`{{x->-1},{x->4}}` のように, $x = -1$ ではなく, `{x->-1}`の形式の規則の代入リストで返答されることに注意しよう.

そのおかげで，2) のようにすると，`x/. {{x->-1},{x->4}}` と同じ指示になり，x が -1 で変換され，続いて 4 でも変換され，二つの結果が `{-1,4}` のように返答される.

3) では，最初に，`{{x->-1},{x->4}}` を `sol` として定義することになるので（この後は `sol` は記憶される）．その後，式 x において，x を解 `sol` で変換する指示をすることになるので上の 2) と同じ．ここで，記号　; は "続いてさらに" という意味である．また，4) では式 $x^2 - 3x - 4$ における x を記憶されている解 `sol` (`{x->-1},{x->4}`) で変換する指示になる．当然 `{0,0}` が返答される.

このように，解は Replace の規則に適合できるように返答される.

(2) 連立一次方程式

$$L1 = 0, L2 = 0, \ldots, Lm = 0$$

の解法，ただし $Lk = a_{1k}x + a_{2k}y + \cdots + a_{kn}z$ $(k = 1, \ldots, m)$ で未知数は, $x, y, \ldots, z$ の場合.

解法は

```
Solve[{L1==0,L2==0, ..., Lm==0},{x,y,...,z}]
```

である．関数 `Solve` においても，２つ以上の式は`{　}` で括るのが Mathematica の基本ルール.

注意　　連立一次方程式は, 求めたい解の様子によって，一組の場合，無数にある場合，存在しない場合の３通りがあり，それに応じた Mathematica の答え方を次の例題で確認してほしい.

例題 2

(1) 連立方程式

$$2x + y = 2$$
$$x - y = 1$$

を解きなさい.

答　未知数は x, y だから

```
Solve[{2*x+y==2,x-y==1},{x,y}]
```

として解く．このとき
$out[1] =$ `{{x->1, y->0}}`
と出力される．続いて次のようにタイプして実行する.

```
{x,y}/.Solve[{2*x+y-2==0,x-y-1==0},{x,y}]
```

このとき
$out[2]=$ {{1,0}}
と出力される．結果として，２つの式 x と y において，x と y がそれぞれ解 1 と 0 で変換された形で出力されるが Mathematica では規則の代入リストが便利という考え方である．

(2) 連立方程式

$$\begin{aligned} x-2y+3z&=2\\ 2x-3y+4z&=3\\ 3x-8y+13z&=8 \end{aligned}$$

を解きなさい.

答　未知数は x, y, z だから

```
Solve[{x-2*y+3*z==2,2*x-3*y+4*z==3,
3*x-8*y+13*z==8},{x,y,z}]
```

とする．このとき以下のように出力される．

Solve::svars:方程式はすべての"Solve" 変数に対しては解を与えない可能性があります．>>
$out[3]=$ {{x->z，y->-1+2z}}

これは，実質，方程式の数が未知数の数より少ない方程式になることを意味し，z は任意定数として扱われる．そこで次のようにタイプし実行する．

```
sol2:=Solve[{x-2*y+3*z==2,2*x-3*y+4*z==3,3*x-8*y+13*z
==8},{x,y,z}];sol2/.z->c
```

このとき
Solve::svars:方程式はすべての"Solve" 変数に対しては解を与えない可能性があります．>>
$out[4]=$ {{x->c，y->-1+2c}}
のように出力されて, 教科書で示される解のようになる．

(3) 連立方程式

$$\begin{aligned} x-y&=2\\ x-y&=1 \end{aligned}$$

を解きなさい.

答 以下のように解けばよい.

```
Solve[{x-y==2,x-y==1},{x,y}]
```

このとき
$out[5]$ `{}`
と出力される．`{}` は解が存在しないということを意味する．

２．関数 `NSolve`，関数 `FindRoot`
`?NSolve`，`?FindRoot` タイプし，実行するとこの使い方の説明が表示される．

（1） 5 次以上の方程式のように，解の公式が存在しないとか，その代数的な解法が知られていないときは近似解を求める次の方法がある．

```
NSolve[f[x]==0,x]
```

（2） 指数関数，三角関数など超越関数を含む方程式 $f(x) = 0$ の解法は，グラフを描いて，解に近い点 $x = a$ を見つけて

```
FindRoot[f[x]==0,{x,a}]
```

とすると，解を求めることができる．ただし，解は近似解となる．

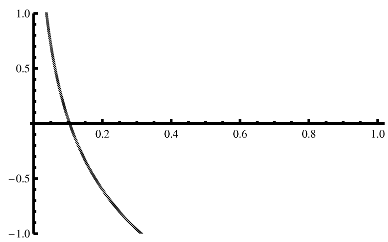
例題 3

$\log(x + 2) - \log x = 3$ を解きなさい．

答 解がありそうな区間を見つけて（試行錯誤が必要），関数 `Plot` を用いて $[0.01, 1]$ ($x > 0$ だから) でグラフを描く．

```
Plot[Log[x+2]-Log[x]-3,{x,0.01,1},PlotRange->{-1,1}]
```

(ここで $\log x$ は `Log[x]` と表記する) グラフは以下のようになる．



この結果，x 軸と交わる点が解となるので，その点は $x = 0.1$($x = 0.5$ でもよい) の近くであることがわかる．

```
FindRoot[Log[x+2]-Log[x]==3,{x,0.1}]
```

とする．このとき
$out[5]$ `{x -> 0.104791}`
と近似解が表示される．または `NSolve` を用いて次のように計算できる．

```
NSolve[Log[x+2]-Log[x]==3,x]
```

問題

(1) $\dfrac{3x-6}{x-1} = -x+2$ の解を求めよ (グラフも書いて見よ).

(2) $\sqrt{x-1} = x-3$ の解を求めよ．($\sqrt{x-1}$ は `Sqrt[x-1]` のように `Sqrt[ ]` を用いて表記する)

(3) 5 次方程式 $x^5+2x^4+3x^3-2x^2+5x-5=0$ の近似解を求めよ．

(4) $e^{x^2} = 3\sin x$ の近似解を求めよ (グラフも書いて見よ).

(5) $x^{10} = 2^x$ を満たすすべての実数 x を見つけよ ($\lim_{x\to\infty} x^{10}/2^x = 0$ に注意せよ).