$\lim_{n\to\infty} A(n),\ \lim_{n\to\infty} B(n)$ を調べて見よう.

2 次導関数の定義は

$$f''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$$

これを以下のように考える.

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}\\
&=\frac{-f(x)+f(x+h)-f(x)+f(x-h)}{h^2}\\
&=\frac{-(f(x)-f(x+h))-(f(x)-f(x-h))}{h^2}\\
&=\frac{\frac{-(f(x)-f(x+h))}{h}-\frac{(f(x)-f(x-h))}{h}}{h}\\
&=\frac{\frac{(f(x)-f(x+h))}{-h}-\frac{(f(x-h)-f(x))}{-h}}{h}\\
&=\frac{\frac{(f(x+h+(-h))-f(x+h))}{-h}-\frac{(f(x+(-h))-f(x))}{-h}}{h}
\end{aligned}$$

ここで, 導関数の定義の関係

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+(-h))-f(x)}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}$$

などに注意すると $h\to 0$ ならば

$$\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} \fallingdotseq \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} \to f''(x)$$

さて，先に計算したように， $A(n),\ B(n)$ は以下のようになる.

$$A(n) = \frac{1}{2}\left(\frac{f(\frac{1}{n})+f(\frac{-1}{n})}{\frac{1}{n^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{f(\frac{1}{n})+f(\frac{-1}{n})-2f(0)}{\frac{1}{n^2}}\right)$$

$$B(n) = \frac{1}{2}\left(\frac{f(\frac{1}{n})-f(\frac{-1}{n})}{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{f(\frac{1}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}}+\frac{f(\frac{-1}{n})-f(0)}{\frac{-1}{n}}\right)$$

これより，$h=\dfrac{1}{n}$ として，上式に適用すると，$n\to\infty$ ならば $h\to 0$ で,
$A(n)\to\dfrac{f''(0)}{2}$, $B(n)\to\dfrac{f'(0)+f'(0)}{2}=f'(0)$ がわかる.