

応用数学II・レポート（1）

定数係数の線形微分方程式

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}(t)$$

ただし、 A は n 次の正方行列とする．このとき、 e^{tA} は基本行列になる．

定理 $X(t)$ を任意の基本行列とすると、

$$e^{tA} = X(t)X(0)^{-1}$$

ここで、 $X(0)^{-1}$ は $X(0)$ の逆行列．

課題 1

(1) 以下の 1. または 2. の行列に対して、固有ベクトルの方法 ($\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ を代入してベクトル $\mathbf{v}$ と定数 λ を見つける方法) で基本行列 $X(t)$ を一つ求め、定理の等式が成立するかどうかを、 e^{tA} の各成分を t^2 の項まで計算して確かめよ．

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(2) 次の偏微分方程式の型を述べ、適当なアフィン変換

$$\tilde{x} = ax + by + \alpha$$

$$\tilde{y} = cx + dy + \beta$$

を選んで標準形に直せ．

1. $u_{yy} + 2u_{xy} + u = 0$

2. $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$