

応用数学II・課題(1)

定数係数の線形微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t)$$

に対して、 e^{tA} は基本行列(解)になる。ここで、 A は n 次の正方行列とする。

定理 $X(t)$ を任意の基本行列(解)とすると、

$$e^{tA} = X(t)X(0)^{-1}$$

ここで、 $X(0)^{-1}$ は $X(0)$ の逆行列。

課題1

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき、定数係数の線形微分方程式 $\frac{dx}{dt} = Ax(t)$ に対して

1. 固有値と固有ベクトルを利用する方法(すなわち $x(t) = ve^{\lambda t}$ を代入してベクトル v と定数 λ を見つける方法)で基本行列 $X(t)$ を計算せよ。
2. 実際に e^{tA} の各成分を t^3 の項まで計算し、(1)で得られた $X(t)$ に対して、上の定理が成立することを確かめよ。